

# INVERS TRANSFORMASI Z





# Invers Transformasi Z

Invers transformasi-z adalah menentukan  $x(n)$  dari  $X(z)$  beserta Region of Convergence-nya.

Ada banyak metode untuk melakukan invers dari  $X(Z)$  untuk memperoleh  $x(n)$ .

Beberapa di antaranya yang akan dibahas di sini adalah:

1. Cara langsung
2. Cara ekspansi deret tak hingga
3. Cara Penguraian pecahan
4. Metode Residu



# Cara Langsung

Cara langsung dilakukan pada bentuk-bentuk  $X(Z)$  yang sederhana atau dapat langsung dilihat di tabel serta mengingat sifat-sifat transformasi-z.

Bentuk  $X(Z)$  yang rumit tentu tidak dapat dilakukan dengan cara ini. Sedikit manipulasi matematika kadang-kadang diperlukan sebelum melihat tabel.



# Contoh (Cara Langsung)

Tentukan  $x(n)$  dari  $X(z)$  dan ROC berikut:

$$X(z) = \frac{1}{z(z-1)} \rightarrow \text{ROC: } |z| > 1$$

Jawab :

Karena ROC  $|z| > 1$ , maka kita tahu bahwa  $x(n)$  bersifat kausal.

Modifikasi dari  $X(Z)$  menjadi:

$$X(z) = \frac{1}{z^2} \frac{z}{(z-1)} = z^{-2} \cdot \frac{z}{(z-1)}$$



$$X(z) = \frac{1}{z^2} \frac{z}{(z-1)} = z^{-2} \cdot \frac{z}{(z-1)}$$

Invers dari  $\frac{z}{(z-1)}$  adalah  $u(n)$ . Dengan menggunakan

sifat 2, pergeseran pada domain waktu:

$$\text{TZ}[x(n - n_0)] = z^{-n_0} X(z)$$

maka kita peroleh:

$$x(n) = \text{TZ}^{-1} \left[ z^{-2} \cdot \frac{z}{(z-1)} \right] = u(n-2)$$



# Contoh (Pembagian Langsung)

Tentukan nilai  $x(n)$  untuk  $n=0,1,2,3$

$$X(Z) = \frac{10Z+5}{(Z-1)(Z-0,2)} = \frac{10Z+5}{Z^2 - 1,2Z + 0,2}$$

Tuliskan  $X(Z)$  dalam bentuk  $Z^{-1}$

$$X(Z) = \frac{10z^{-1} + 5z^{-1}}{1 - 1,2z^{-1} + 0,2z^{-2}}$$

Lakukan Pembagian langsung, sehingga didapatkan

$$X(z) = 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18,4z^{-3} + \dots$$

Sehingga  $x(n)$  untuk  $n=0,1,2,3$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 10, \quad x(2) = 17, \quad x(3) = 18,4$$



# Contoh (Partial Fraction)

$$H(z) = \frac{z^2+z}{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}} = \frac{z(z+1)}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})} \rightarrow \text{Tentukan } h(n) !$$

Dengan ROC  $|z| > \frac{1}{2}$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{(z+1)}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} - \frac{B}{z-\frac{1}{3}}$$

$$A = \frac{H(z)}{z} (z-\frac{1}{2}) = \frac{(z+1)}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})} (z-\frac{1}{2}) = \frac{(z+1)}{(z-\frac{1}{3})} = 9 ; \text{ untuk } z = \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{H(z)}{z} (z-\frac{1}{3}) = \frac{(z+1)}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})} (z-\frac{1}{3}) = \frac{(z+1)}{(z-\frac{1}{2})} = 8 ; \text{ untuk } z = \frac{1}{3}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{9}{z-\frac{1}{2}} - \frac{8}{z-\frac{1}{3}}$$

$$H(z) = \frac{9z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{8z}{z-\frac{1}{3}}$$



$$H(Z) = \frac{9Z}{Z - \frac{1}{2}} - \frac{8Z}{Z - \frac{1}{3}}$$

→  $h(n) ??$

$$\mathcal{TZ}^{-1} \left( \frac{9Z}{Z - \frac{1}{2}} \right) = 9 \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

$$\mathcal{TZ}^{-1} \left( \frac{8Z}{Z - \frac{1}{3}} \right) = 8 \left( \frac{1}{3} \right)^n$$


$$h(n) = 9 \left( \frac{1}{2} \right)^n - 8 \left( \frac{1}{3} \right)^n$$





# Akar – Akar Kembar Pada Pole

$$H(Z) = \frac{N(z)}{(z-a)^P D(z)}$$

Akar-akar kembar

Contoh :

$$H(Z) = \frac{11z^2 - 15z + 6}{(z-2)(z-1)^2}$$

Akar-akar kembar



# Akar – Akar Kembar Pada Pole

$$H(Z) = \frac{N(z)}{(z-\alpha)^p D(z)}$$

Akar-akar kembar

$$H(Z) = \frac{A_1}{z-\alpha} + \frac{A_2}{(z-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_p}{(z-\alpha)^p} + G(Z)$$

→ G(Z) mempunyai nilai pole pada D(Z)

Lakukan perkalian dengan  $(z - \alpha)^p$

$$H(Z) (z - \alpha)^p = A_1 (z - \alpha)^{p-1} + A_2 (z - \alpha)^{p-2} + \dots + A_p + G(Z) (z - \alpha)^p$$



$$H(Z) (z - \alpha)^p = A_1 (z - \alpha)^{p-1} + A_2 (z - \alpha)^{p-2} + \dots + A_p + \frac{G(Z)}{(z - \alpha)^p}$$

$$A_p = H(Z) (z - \alpha)^p; \text{ untuk } Z = \alpha$$

$$A_1 = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} (Z - \alpha)^p H(Z); \text{ untuk } Z = \alpha$$

$$A_2 = \frac{1}{(p-2)!} \frac{d^{p-2}}{dz^{p-2}} (Z - \alpha)^p H(Z); \text{ untuk } Z = \alpha$$



# Contoh

$$H(Z) = \frac{11z^2 - 15z + 6}{(z-2)(z-1)^2} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-2}$$

$$\begin{aligned} B &= H(Z)(Z-2) = \frac{11z^2 - 15z + 6}{(z-2)(z-1)^2} (Z-2) \\ &= \frac{11z^2 - 15z + 6}{(z-1)^2} = 20; \text{ untuk } Z = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= H(Z)(Z-1)^2 = \frac{11z^2 - 15z + 6}{(z-2)(z-1)^2} (Z-1)^2 \\ &= \frac{11z^2 - 15z + 6}{(z-2)} = -2; \text{ untuk } Z = 1 \end{aligned}$$



$$H(Z) = \frac{11z^2 - 15z + 6}{(z-2)(z-1)^2} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-2}$$

$$\begin{aligned} B &= H(Z)(Z-2) = \frac{11z^2 - 15z + 6}{(z-2)(z-1)^2} (Z-2) \\ &= \frac{11z^2 - 15z + 6}{(z-1)^2} = 20; \text{ untuk } Z = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= H(Z)(Z-1)^2 = \frac{11z^2 - 15z + 6}{(z-2)(z-1)^2} (Z-1)^2 \\ &= \frac{11z^2 - 15z + 6}{(z-2)} = -2; \text{ untuk } Z = 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz} (Z-1)^2 H(Z) \\ &= \frac{d}{dz} (Z-1)^2 \frac{11z^2-15z+6}{(z-2)(z-1)^2} = \frac{d}{dz} \frac{11z^2-15z+6}{(z-2)} \\ &= \frac{22z-15 - (11z^2-15z+6)}{(z-2)^2} = -9; \text{ untuk } Z = 1 \end{aligned}$$

Sehingga,

$$H(Z) = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-2} = \frac{-9}{z-1} + \frac{-2}{(z-1)^2} + \frac{20}{z-2}$$

$$Z \cdot H(Z) = \frac{-9Z}{z-1} + \frac{-2Z}{(z-1)^2} + \frac{20Z}{z-2}$$

$$Z \cdot H(Z) = (-9 - 2n + 2^n) u(n)$$

$$H(Z) = (-9 - 2(n+1) + 2^{n+1}) u(n+1)$$

Sifat Pergeseran pada sumbu waktu