SISTEM

Outline Modul

A. Representasi Sistem
B. Sistem Deterministik dan Sthocastic
C. Sistem Waktu Kontinyu dan Sistem Waktu Diskrit
D. Sistem Dengan Memori dan Tanpa Memori
E. Sistem Kausal dan Non Kausal
F. Sistem Linier dan Nonlinier
   1. Penjumlahan (Additivity)
   2. Homogenitas (Penskalaan)
G. Sistem Invariansi Waktu
H. Sistem Linier Time Invariant
I. Sistem Stabil
J. Sistem Umpan Balik

Representasi Sistem

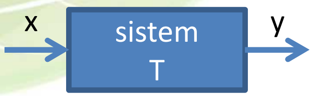
Sistem adalah sebuah model matematis dari sebuah proses fisik yang menghubungkan sinyal input (sinyal rangsang) terhadap sinyal output (sinyal respon).

Jika x dan y adalah sinyal input dan output, masing-masing pada sebuah sistem. Kemudian sistem dapat diperlihatkan sebagai mapping (transformasi) dari x ke dalam y. Notasi matematis dari transformasi tersebut adalah sebagai berikut:

$$y = Tx$$

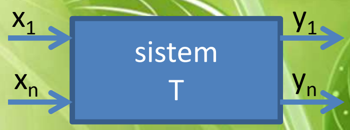
dimana T = transformasi

Hubungan antara sinyal input dan output pada sebuah sistem dapat digambarkan sebagai berikut :



(a)

Jika input dan output lebih dari satu???



(b)

(a) Sistem dengan sinyal input dan sinyal output tunggal

(b) Sistem dengan sinyal input dan sinyal output banyak (lebih dari satu)

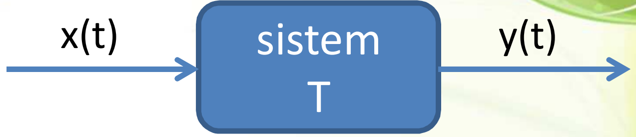
Sistem Deterministik dan Stokastik

Jika sinyal input x dan sinyal output y adalah sinyal deterministik, maka sistem tersebut disebut sistem deterministik.

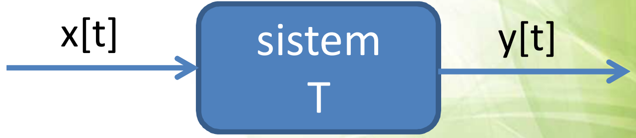
Jika sinyal input x dan sinyal output y adalah sinyal random (acak), maka sistem tersebut disebut stokastik.

Sistem Waktu Kontinyu (SWK) dan Sistem Waktu Diskrit (SWD)

Jika sinyal input x dan sinyal output y merupakan sinyal kontinyu, maka sistem disebut sistem waktu kontinyu.



Jika sinyal input x dan sinyal output y merupakan sinyal waktu diskrit, maka sistem disebut sistem waktu diskrit.



Sistem Dengan Memori dan Tanpa Memori

Sistem Tanpa Memori

Sistem dikatakan sebagai memoryless jika output pada setiap waktu bergantung hanya pada masukan pada waktu yang sama, sebagai contoh sistem yang ditetapkan oleh hubungan :

$$y[n] = (2\ x[n] - x^2[n])^2$$

Adalah tanpa memori, karena harga y[n] pada setiap waktu tertentu n_0 hanya bergantung pada harga x[n] pada waktu t_0.

Sebuah contoh dari sistem memoryless adalah sebuah resistor R dengan input x(t) sebagai arus da tegangan y(t). Maka hubungan input-output (hukum ohm) dari sebuah resistor adalah :

$$y(t) = R\ x(t)$$

Sistem Dengan Memori dan Tanpa Memori

Sistem Dengan Memori

Contoh dari sistem dengan memori adalah sebuah kapasitor C dengan arus sebagai input x(t) dan tegangan sebagai output y(t), maka

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

contoh sistem waktu diskrit dengan memori adalah akumulator/penjumlahan.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

dan contoh lainnya adalah penundaan atau delay

$$y[n] = x[n-1]$$

Sistem Kausal dan Non Kausal

Sebuah sistem disebut kausal jika setiap waktu keluaran hanya tergantung pada harga masukan saat ini dan yang lalu. Pada sistem kausal, kita tidak mungkin bisa mendapatkan output sebelum input diberikan pada sistem.

Sebuah sistem dikatakan non kausal (antisipatik) jika output pada saat ini bergantung pada nilai input pada waktu berikutnya.

Contoh sistem ini adalah??

$$\left.\begin{array}{c} y[n] = x\,(t+1) \\ y[n] = x[-n] \end{array}\right\} \text{Non kausal}$$

Catatan : semua sistem memoryless adalah kausal, tapi tidak sebaliknya.

Kausal dan Non Kausal

Contoh 1:

$y(t) = 2x(t) + 3x(t+1)$

Input saat ini

Input pada waktu berikutnya

Misal
$$t = 0 \rightarrow y(0) = 2x(0) + 3x(1)$$
$$t = 1 \rightarrow y(1) = 2x(1) + 3x(2)$$
$$t = 2 \rightarrow y(2) = 2x(2) + 3x(3)$$

Output saat ini

Karena outputnya tergantung dari input saat ini dan input berikutnya, maka ini termasuk **sistem Non Kausal.**

Kausal dan Non Kausal

<u>Contoh 2:</u>

Input saat ini

$y(t) = 2x(t) + 2y(t-1)$

Misal $\quad t = 0 \rightarrow y(0) = 2x(0) + 3y(-1)$

$t = 1 \rightarrow y(1) = 2x(1) + 3y(0)$

$t = 2 \rightarrow y(2) = 2x(2) + 3y(1)$

Output pada waktu sebelumnya

Output saat ini

Karena outputnya tergantung dari input saat ini dan output sebelumnya, maka ini termasuk **sistem Kausal.**

Kausal dan Non Kausal

Contoh 3:

$$y(t) = 2x(t) + 3x(t-1) + \frac{1}{2}x(t-3)$$

Input saat ini

Input pada waktu sebelumnya

Misal

$$t = 0 \rightarrow y(0) = 2x(0) + 3x(-1) + \frac{1}{2}x(-3)$$

$$t = 1 \rightarrow y(1) = 2x(1) + 3x(0) + \frac{1}{2}x(-2)$$

$$t = 2 \rightarrow y(2) = 2x(2) + 3x(1) + \frac{1}{2}x(-1)$$

Output saat ini

Karena outputnya tergantung dari input saat ini dan input sebelumnya, maka ini termasuk **sistem Kausal.**

Sistem Linier dan Nonlinier

1. Penjumlahan (aditivitas)

$$T\{x_1+x_2\} = y_1+y_2$$

Homogenitas (penskalaan)

$$T\{\alpha x\} = \alpha y$$

Antara persamaan 1 dan persamaan 2 dapat dikombinasikan seperti berikut.

$$T\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

dimana : α_1 dan α_2 = skalar

Linearitas/Linier

Jika suatu input sistem dikalikan dengan suatu konstanta k maka output juga harus dikalikan dengan konstanta.

Contoh 1 :

Selidiki apakah $y(t) = \frac{1}{2}x(t)$ bersifat linier atau bukan?

$$y_1(t) = \frac{1}{2}x_1(t)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2}x_2(t)$$

$$+$$

$$y_1(t) + y_2(t) = \frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t)$$

$$y_1(t) + y_2(t) = \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t))$$

Prinsip Additivitas
(penjumlahan terpenuhi)

Linearitas/Linier

$$\underbrace{y_1(t) + y_2(t)}_{} = \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t))$$

Prinsip Additivitas (penjumlahan terpenuhi)

Asumsi : $y_1(t) + y_2(t) = y_3(t)$

$x_1(t) + x_2(t) = x_3(t)$

maka

$$y_3(t) = \frac{1}{2}x_3(t)$$

terbukti bahwa persamaan tersebut linier

Linearitas/Linier

Contoh 2 :

Suatu sistem menerima sinyal masukan x(t) dan mengolahnya dengan memberi sinyal keluaran y(t) = 2x + 1. Tentukan apakah sistem tersebut linier?

$$x_1(t) \rightarrow \; y_1(t) = 2x_1(t) + 1$$
$$x_2(t) \rightarrow \; y_2(t) = 2x_2(t) + 1$$

Pembuktian dengan additif dan penskalaan

$$x_3 = ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow \; y_3(t) = 2x_3(t) + 1$$

$$\begin{aligned} y_3(t) &= 2x_3(t) + 1 \\ &= 2[ax_1(t) + bx_2(t)] + 1 \\ &= 2ax_1(t) + 2bx_2(t) + 1 \\ &= a[2x_1(t) + 1] + b[2x_2(t) + 1] + 1 - a - b \\ &= ay_1(t) + by_2(t) + 1 - a - b \end{aligned}$$

Terbukti tidak linier

Latihan Linearitas

Coba kerjakan

1. $y(t) = x(t)^2$
2. $y(t) = \frac{1}{2}x^2(t)$
3. $y(t) = \frac{1}{2}x^2(t) + \frac{1}{5}$
4. $y(t) = x\left(\frac{1}{2}t\right)$
5. $y(t) = t^2x(2t)$

Sistem Waktu Invariant dan Sistem Waktu Variant

Sebuah sistem disebut time-invariant jika dalam pergeseran waktu (delay/advance) pada sinyal input menyebabkan pergeseran waktu yang sama dengan sinyal output.

Untuk sistem waktu kontinyu, sistem waktu **invariant** jika :

$$T\{x(t-\tau) = y(t-\tau)$$

Untuk semua nilai τ, pada sistem waktu diskret, sistem waktu **Invariant** (pergeseran invariant) jika :

$$T\{x(n-k) = y(n-k) \quad ; \text{k = interger (bilangan bulat)}$$

Jika sistem **tidak** memenuhi pernyataan di atas maka **sistem waktu variant.**

Time Variant dan Invariant

Contoh 1

$y(t) = 2x(t) + 1$

$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = 2x_1(t) + 1$

$x_2(t) = x_1(t - t_0) \rightarrow y_2(t) = 2x_1(t - t_0) + 1$

$y_2(t) = y_1(t - t_0)$

Time Invariant

Contoh 2

$y(t) = \frac{1}{2}x^2(t)$

$x_1 \rightarrow y_1(t) = \frac{1}{2}x^2(t)$

$x_2 = x_1(t - t_0) \rightarrow \quad y_2(t) = \frac{1}{2}{x_1}^2(t - t_0)$

$y_2(t) = y_1(t - t_0)$

Time Invariant

Time Variant dan Invariant

Contoh 3

$$y(t) = \frac{1}{2}x^2(3t)$$

$$x_1(t) \to y_1(t) = \frac{1}{2}x^2(3t)$$

$$x_2(t) \to x_1(t - t_0)$$

$$y_2(t) \to \frac{1}{2}{x_1}^2\big(3(t - t_0)\big) \to \frac{1}{2}{x_1}^2(3t - 3t_0)$$

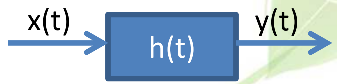
Time Variant

Sistem Linier Time Invariant (LTI)

Jika sistem linier dan juga time-invariant, maka sistem ini disebut sistem LTI (Linier Time Invariant)

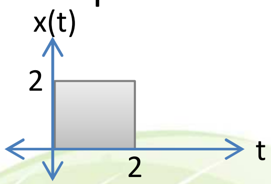
Implementasi sifat LTI (Linier Time Invariant)

Jika diketahui suatu sistem LTI sebagai berikut :

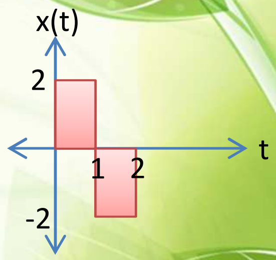


Sistem di beri input :

x(t):

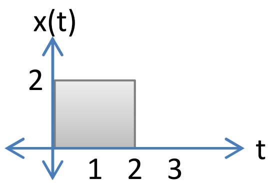


y(t):



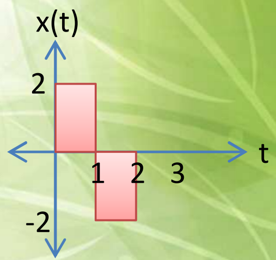
Ketika input di geser ke kanan sejauh 1 (terdelay 1 sekon)

x(t):



Maka y(t)??

y(t):



Output bergeser ke kanan (terdelay 1 sekon)

Kestabilan Sistem

Sebuah sistem disebut input terbatas (bounded input) dan output terbatas (bounded output) (BIBO) stabil, maka untuk input x terbatas didefinisikan sebagai:

$$|x| \leq k_1$$

Untuk output y juga dibatasi oleh

$$|y| \leq k_2$$

Dimana k_1 dan k_2 adalah nilai real terbatas dan konstan.

Stabil dan Non Stabil

Misal

- $y(t) = 0.5\ x(t)$

  dengan $x(t) = u(t)$ →bersifat **stabil**

  $$\left.\begin{aligned} &t = 1 \rightarrow y(t) = 0.5\,u(t) \\ &t = 2 \rightarrow y(t) = 0.5\,u(t-2) \end{aligned}\right\} \text{Nilai output terbatas}$$

- $y(t) = \frac{2}{t-2} x(t)$ dengan $x(t) = u(t-2)$

  saat t = 2 nilainya $y(2) = \frac{2}{2-2}\ u(t-2) = \infty$

  karena output tak terbatas maka sistem bersifat **tidak stabil**